Seria 3

Zadanie 1

Okres wahadła matematycznego o amplitudzie α to:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{\mathrm{SAG}(1,\cos(\alpha/2))}$$

Oblicz 3 kolejne pary średnich i potraktuj średnią geometryczną trzeciej pary, jako wyrażenie przybliżone na okres wahadła.

Jaka jest dokładność względna tego wyrażenia dla amplitudy $90°$?

Dla jak dużej amplitudy dokładność tego (dość prostego wyrażenia) jest co najmniej 10^{-6}.

Jaka jest dokładność, dla $90°$, (którejkolwiek z dwóch) średniej następnej, czwartej, generacji.

Zadanie 2

Jaka ma być postać symetrycznego potencjału $V(x)$, by zależność okresu od energii całkowitej była potęgowa: $T(E) = a \cdot E^n$?

Dla jakich (rzeczywistych n) istnieją rozwiązania?

Zadanie 3

Punkt zawieszenia wahadła matematycznego oscyluje z dużą częstością, ale amplitudą a dużo mniejszą od długości wahadła l. Odcinek wzdłuż którego odbywają się oscylacje nie jest ani poziomy, ani pionowy (jak na ćwiczeniach), lecz tworzy kąt α z kierunkiem pionu.

Znajdź położenia równowagi dla (uśrednionego) ruchu wahadła. Przedyskutuj ich położenie i charakter (równowaga trwała czy nietrwała) w zależności od wielkości bezwymiarowego parametru: $\frac{a^2\omega^2}{4gl}$.

Zadanie 4

Nierozciągliwą, jednorodną, wiotką nić o długości $2l$ przymocowano końcami do pionowego pręta, w odległości $2a<2l$. Pręt wprawiono w jednostajny ruch obrotowy (wokół osi pokrywającej się z tymże prętem) z prędkością kątową ω.

Po dostatecznie długim czasie, kształt liny ustala się, a ruch pręta i łuku liny wygląda jak ruch sztywnej figury (podobnej do, z lekka obwisłej, litery *D*). Wyznacz kształt liny w postaci równania z (nieelementarną) całką.

Wykaż, że dla dostatecznie szybkich obrotów, kształt liny dąży do takiego, który **maksymalizuje** moment bezwładności liny względem osi wirowania.

wielkości bezwymiarowego parametru: $\frac{a^2\omega^2}{4gl}$.

Zadanie 5

Dzięki oczywistej zależności: $\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}s^2 \text{-} \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1\text{-}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2}\,\mathrm{d}s$, pole figury ograniczonej osią x i wykresem funkcji $y(x)$ zaczynającym się w punkcie $\{-a,0\}$ i kończącym w punkcie $\{a,0\}$ **o zadanej długości** $2l > 2a$ (identycznie jak w zadaniu rozwiązywanym na ćwiczeniach), może być wyrażone za pomocą funkcji $y(s)$, gdzie s jest długością liny mierzoną od środka:

$$\text{Pole} = \int_{-l}^{l} F\big(y(s), \dot{y}(s)\big)\mathrm{d}\ s\ .$$

Szukanie kształtu krzywej pozwalającej ograniczyć maksymalny obszar sprowadza się teraz do znalezienia $y(s)$. Rozwiąż to zadanie wariacyjne. Wyznacz $y(s)$, a następnie $x(s)$, i przekonaj się, że wychodzi znany nam już łuk okręgu.

Zadanie 6

Trzy identyczne wahadła (o długości l) połączone dwiema sprężynami o współczynniku sprężystości k i długości spoczynkowej równej odległości między punktami zawieszenia wahadeł (wszystko jak na ćwiczeniach), zostały wytrącone z położenia równowagi nadaniem wahadłu skrajnemu prędkości początkowej (ku wahadłu środkowemu) o wartości:

$$v_0 \ll \sqrt{gl}$$

Wyznacz ruch układu. Przedyskutuj, w szczególności, obraz ruchu dla **bardzo słabych** sprężyn:

$$k \ll \frac{mg}{l}$$